Teoria miary

WPPT/Matematyka, rok II

Lista 18

1. Niech f_n będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych. Pokaż, że

$$\int \sum_n f_n \, d\mu = \sum_n \int f_n \, d\mu.$$

   Czy powyższa równość zachodzi dla funkcji znakowanych przy założeniu, że miara jest skończona i $\sum_n f_n$ jest zbieżny prawie wszędzie do pewnej funkcji całkowalnej z modułem?

2. Niech μ, ν, λ oznaczają miary na pewnej przestrzeni $(X, \mathfrak{F})$. Wykazać następujące własności pochodnej Radona-Nikodyma:

   (a) $\left[\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}\right] = \left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right] + \left[\frac{d\nu}{d\lambda}\right]$,

   (b) Jeżeli $\nu \ll \mu \ll \lambda$, to $\left[\frac{d\nu}{d\lambda}\right] = \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] \cdot \left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right]$,

   (c) Jeżeli $\nu \ll \mu$ oraz $\mu \ll \nu$, to $\left[\frac{d\mu}{d\nu}\right] = \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]^{-1}$,

   (d) Jeżeli f jest ν-całkowalna i $\nu \ll \mu$, to $\int f \, d\nu = \int f \cdot \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] d\mu$.

3. Niech μ będzie miarą skończoną na $(X, \mathfrak{F})$. Ustalmy zbiór A. Dla $B \in \mathfrak{F}$ definiujemy $\nu(B) = \mu(B \cap A)$. Udowodnić, że $\nu \ll \mu$ i znaleźć pochodną Radona-Nikodyma.

4. Dla $r \in \mathbb{R}$ oznaczmy $B + r = \{b + r : b \in B\}$ i niech λ będzie miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Dla pewnej nieujemnej funkcji całkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy $\nu(B) = \int_B f \, d\lambda$ i $\nu_r(B) = \nu(B + r)$. Udowodnić, że $\nu_r \ll \lambda$ i znaleźć pochodną Radona-Nikodyma. Jakie są relacje między ν a ν_r ($\ll$, $\perp$)?

5. Udowodnij Twierdzenie Radona-Nikodyma (czyli $\nu \preccurlyeq \mu \implies d\nu = f d\mu$) w przypadku, gdy μ jest σ-skończona.

6. Udowodnij, że funkcja gęstości f w tw. Radona-Nikodyma jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do miary, tzn, jeśli $d\nu = f d\mu = g d\mu$, to $f = g$ μ-p.w.